3.5.16 Slovní úlohy o pohybu II

Předpoklady: 030515

Př. 1: Adam a Eva bydlí 9 km od sebe. Občas si dávají romantické schůzky téměř na půl cesty. Oba vyjedou na kole ve stejný okamžik - Adam rychlostí 15 km/h, Eva rychlostí 12 km/h. Za jak dlouho a kde se potkají? Hledej řešení pomocí rovnice.

Řešení bez rovnice: Adam jede rychlostí 15 km/h, Eva rychlostí 12 km/h $\Rightarrow$ přibližují se rychlostí $15+12\text{ km/h} = 27\text{ km/h}$.

$v = 27\text{ km/h}$, $s = 9\text{ km}$

$s = vt \quad / : v$

$t = \frac{s}{v} = \frac{9}{27}\text{ h} = \frac{1}{3}\text{ h} = 20\text{ min}$

$s_A = v_A t_A = 15 \cdot \frac{1}{3}\text{ km} = 5\text{ km}$

Potkají se po 20 minutách ve vzdálenosti 5 km od místa, kde bydlí Adam.

Zkusíme řešení pomocí rovnice (rovnice umožňují řešit i daleko obtížnější příklady než je tento).

Adam a Eva musí dohromady urazit 9 km: $s_A + s_B = 9$ (nejdůležitější rovnice, zachycuje základní vlastnost situace).

Obě dráhy můžeme vyjádřit pomocí času a rychlosti: $v_A t_A + v_E t_E = 9$.

Oba vyrazili najednou $\Rightarrow$ oba časy jsou stejné, $t_A = t_B = t$: $v_A t + v_E t = 9$.

Dosadíme hodnoty rychlostí: $15t + 12t = 9$.

$27t = 9 \quad / : 27$

$t = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

Dál už je řešení stejné.

Př. 2: Kája vyrazil s kamarády na kole na chatu. Kousek před cílem, poté co ujeli 13 km, si vzpomněl, že doma zapomněl klíče. Zavolal domů sestře Anežce a přesvědčil ji, aby mu klíče dovezla, že jí vyjede naproti. Kája vysvětlil kamarádům, aby na něj počkali a vyrazil hned zpátky domů rychlostí 24 km/h. Anežka se ještě musela sbalit a vyndat kolo, takže vyrazila o pět minut později rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho se setkali? Kde?

Příklad nejde spočítat stejně jako předchozí, můžeme sice zjistit rychlost přibližování, ale Anežka vyráží na cestu později, takže dohromady od chvíle, kdy vyrazí Anežka, oba neurazí 13 km (ale méně o to, co urazil Kája, než sestra vyrazila na cestu).

Zkusíme sestavit postupně rovnici.

Celkově oba urazí 13 km: $s_K + s_A = 13$.

Obě dráhy můžeme vyjádřit pomocí času a rychlosti: $v_K t_K + v_A t_A = 13$.

Anežka vyrazila o 5 minut později $\Rightarrow$ její čas jízdy je o 5 minut kratší, $t_A = t_K - \frac{5}{60} = t_K - \frac{1}{12}$.

Dosadíme za t_A: $v_K t_K + v_A \left(t_K - \frac{1}{12} \right) = 13$.

Dosadíme hodnoty rychlostí: $24 t_K + 20 \left(t_K - \frac{1}{12} \right) = 13$.

$24 t_K + 20 t_K - \frac{5}{3} = 13$

$44 t_K - \frac{5}{3} = 13 \qquad / \cdot 3$

$132 t_K - 5 = 39 \qquad / + 5$

$132 t_K = 44 \qquad / : 132$

$t_K = \frac{44}{132}\ \text{h} = \frac{11}{33}\ \text{h} = \frac{1}{3}\ \text{h} = 20\ \text{min}$

$t_A = 20 - 5\ \text{min} = 15\ \text{min} = \frac{1}{4}\ \text{h}$

Uražené vzdálenosti:

$s_K = v_k t_K = 24 \cdot \frac{1}{3}\ \text{km} = 8\ \text{km}$

$s_A = v_A t_A = 20 \cdot \frac{1}{4}\ \text{km} = 5\ \text{km}$

Kontrola: $s_A + s_K = 5 + 8\ \text{km} = 13\ \text{km}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad samozřejmě pomocí rovnice naprostá většina žáků nevyřeší, řešíme tedy postupně na tabuli.

Dodatek: Předchozí příklad je možné vyřešit i bez rovnice.

Za 5 minut, po které jede Kája sám, ujede: $s_K = v_K t_K = 24 \cdot \frac{5}{60}\ \text{km} = 2\ \text{km}$.

Ve chvíli, kdy Anežka nasedá na kolo, jsou od sebe sourozenci vzdálení $13 - 2\ \text{km} = 11\ \text{km}$ a přibližují se k sobě rychlostí:

$v = v_K + v_A = 24 + 20\ \text{km} = 44\ \text{km}$.

Sourozenci se potkají za: $t = \frac{s}{v} = \frac{11}{44}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h}$ (stejný výsledek, protože jde o dobu, po kterou jela na kole Anežka).

Př. 3: Ve známé řecké aporii má Achilles dohonit želvu. Achilles je 10 krát rychlejší než želva a proto dá želvě 90 m náskok. Kdy a kde Achilles želvu dohoní, jestliže běží rychlostí 9 m/s?

Ve chvíli, kdy Achilles želvu dohoní, uběhne o 90 m více, než uleze želva.

$s_A = s_Z + 90$

$v_A t_A = v_Z t_Z + 90$ (oba se pohybují stejně dlouho $\Rightarrow$ $t_A = t_Z = t$)

$v_A t = v_Z t + 90$ ($v_A = 9\ \text{m/s}$, $v_Z = 0{,}9\ \text{m/s}$ - běží desetkrát pomaleji)

$9t = 0,9t + 90 \quad / \cdot 10$

$90t = 9t + 900 \quad / -9t$

$81t = 900$

$t = \frac{900}{81} = \frac{100}{9} \doteq 11,1\,\text{s}$

Dráha uběhlá Achillem: $s_A = v_A t_A = 9 \cdot \frac{100}{9} = 100\ \text{m}$

Dráha ulezlá želvou: $s_z = v_Z t_Z = 0,9 \cdot \frac{100}{9} = 10\ \text{m}$

Achilles dožene želvu přesně po 100 m.

Př. 4: Jardovi ujel autobus. Poslední zastávka, na které je možné do autobusu ještě přistoupit, je 19 km od Jardova bydliště. Kdy a kde Jarda autobus dohoní, jestliže ho začne stíhat 6 minut po jeho odjezdu autem rychlostí 80 km/h a autobus jede podle jízdního řádu průměrnou rychlostí 55 km/h?

Ve chvíli, kdy autobus dohoní, urazí autobus i Jarda v autě stejnou vzdálenost.

$s_J = s_A$

$v_J t_J = v_A t_A$ (dosadíme rychlosti $v_J = 80\,\text{km/h}$, $v_A = 55\,\text{km/h}$)

$80 t_J = 55 t_A$ (Jarda vyrazil o 6 minut později: $t_J = t_A - \frac{6}{60} = t_A - 0,1$)

$80(t_A - 0,1) = 55 t_A$

$80 t_A - 8 = 55 t_A \quad / -55 t_A + 8$

$25 t_A = 8 \quad / :25$

$t_A = \frac{8}{25} = 0,32\text{h} = 19,2\,\text{min}$

Vzdálenost uražená Jardou: $s_J = 80(t_A - 0,1) = 80(0,32 - 0,1)\ \text{km} = 80 \cdot 0,22\ \text{km} = 17,6\ \text{km}$.

Vzdálenost uražená autobusem

$s_A = 55 \cdot t_A = 55 \cdot 0,32\ \text{km} = 17,6\ \text{km}$

Př. 5: Andrea s Bohoušem měli jít společně na výlet, Ráno při snídani se však pohádali a tak se Andrea nakonec na plánovaný výlet vydala sama rychlostí 5,5 km/h. Bohouš po 25 minutách trochu vychladl a tak se obul a vydal se za ní rychlostí 4 km/h. Za jak dlouho Bohouš Andreu dohnal?

Ze zadání je ihned jasné, že Bohouš Andreu nikdy nedohoní (alespoň na trase výletu ne), protože vyšel později než ona a jde pomaleji.

Zkusíme však příklad vyřešit, abychom zjistili, jak tato skutečnost projeví při řešení příkladu.

Ve chvíli kdy Bohouš Andreu dohoní, ujdou oba stejnou vzdálenost: $s_A = s_B$.

$v_A t_A = v_B t_B$ (dosadíme rychlosti $v_A = 5,5\,\text{km/h}$, $v_B = 4\,\text{km/h}$)

$5,5 t_A = 4 t_B$ (Bohouš vyrazil o 25 minut později: $t_B = t_A - \frac{25}{60} = t_A - \frac{5}{12}$)

$5{,}5\,t_A = 4\left(t_A - \frac{5}{12}\right)$

$5{,}5\,t_A = 4t_A - 4\cdot\frac{5}{12} \qquad / -4t_A$

$\frac{3}{2}t_A = -\frac{5}{3} \qquad / : \frac{3}{2}$

$t_A = -\frac{10}{9}$ $\Rightarrow$ doba, po kterou se pohybovala Andrea nemůže být záporná $\Rightarrow$ příklad nemá řešení.

Dodatek: Výsledek $t_A = -\frac{10}{9}$ má přesto nějaký význam. Kdyby pohyb Bohouše a Andrey probíhal i před tím než vyrazili, v čase $\frac{10}{9}$ h před tím než Andrea vyrazila na cestu, by byli na stejném místě.

Př. 6: Martin si pro auto do servisu dojel na kole rychlostí 20 km/h. Zpátky autem se vracel rychlostí o 40 km/h větší a byl doma o 16 minut rychleji. Jak daleko je autoservis od Martinova bydliště?

Dráha, kterou ujel Martin na kole, je stejná jako dráha, kterou ujel autem.

$s_K = s_A$

$v_K t_K = v_A t_A \qquad v_K = 20\,\text{km/h},\ v_A = 60\,\text{km/h}$ - autem jel o 40 km/h rychleji

$20t_K = 60t_A \qquad t_A = t_K - \frac{16}{60} = t_K - \frac{4}{15}$ - autem se vrátil o 16 minut rychleji

$20t_K = 60\left(t_k - \frac{4}{15}\right)$

$20t_K = 60t_k - 60\cdot\frac{4}{15}$

$20t_K = 60t_k - 16 \qquad / -20t_K + 16$

$16 = 40t_k \qquad / : 40$

$t_k = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}\,\text{h} = 24\,\text{min}$

Dráha ujetá autem: $s_A = v_A\cdot\left(t_K - \frac{4}{15}\right) = 60\cdot\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right)\text{km} = 60\cdot\left(\frac{6-4}{15}\right)\text{km} = 60\cdot\frac{2}{15}\,\text{km} = 8\,\text{km}$

Dráha ujetá na kole: $s_K = v_K\cdot t_K = 20\cdot\frac{2}{5}\,\text{km} = 8\,\text{km}$

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu se objevují problémy s časem. Někteří žáci se místo doby, po který se Radek nebo Žaneta pohybují, zaměří na čas, ve který se vydají na cestu.

Př. 7: Radek musí od vlaku, který přijíždí v 17:25, chodit domů 4 km. Protože se dnes vrací z delší pracovní cesty, vyšla mu Žaneta s dětmi naproti, ale kvůli problémům s obouváním u nejmladšího Petříčka se zpozdili a na cestu se vydali teprve v 17:10.

Kdy a kde se setkají, jestliže vlak přijel přesně podle jízdního řádu, Radek ihned začne pospíchat od vlaku přímo domů rychlostí 6 km/h, zatímco Žaneta s malými dětmi se pohybuje pouze rychlostí 4 km/h?

Ve chvíli, kdy se potkají, urazí dohromady trasu 4 km

$4 = s_Z + s_R$

$4 = v_Z t_Z + v_R t_R$

$4 = 4 \cdot t_Z + 6 \cdot t_R$

Hledáme vztah mezi časy pohybu: Radek vyrazil v 17:25, Žaneta v 17:10 $\Rightarrow$ Radek je na cestě o 15 minut kratší dobu: $t_R = t_Z - \frac{15}{60} = t_Z - \frac{1}{4}$

$4 = 4 \cdot t_Z + 6 \cdot \left(t_Z - \frac{1}{4} \right)$

$4 = 10 \cdot t_Z - \frac{3}{2} \quad / \cdot 2$

$8 = 20 \cdot t_Z - 3 \quad / + 3$

$11 = 20 \cdot t_Z$

$t_Z = \frac{11}{20} h = 33 \min$

$t_R = 33 - 15 \min = 18 \text{ min} = \frac{18}{60} \text{h} = 0,3 \text{ h}$

Ušlá vzdálenost před setkáním:

- Žaneta: $s_Z = v_Z t_Z = 4 \cdot \frac{11}{20} \text{ km} = 2,2 \text{ km}$,
- Radek: $s_R = v_R t_R = 6 \cdot 0,3 \text{ km} = 1,8 \text{ km}$.

Žaneta šla s dětmi 33 minut, za které ušla 2,2 km.

Př. 8: Jirka v běhu děsně školí Honzu. Zatímco Honza uběhl 100 m za 16,5 sekundy, Jirkovi stačilo jen 12,5 sekundy. Jirka navrhl, že si dají závody na 60 m a aby měl Honza šanci, nechá mu 10 m náskok (Honza tak poběží jen 50 m). Kdy a kde Jirka Honzu dohoní, pokud oba vyběhnou nastejno a poběží stejnou rychlostí jako při závodě na 100 m?

Z výsledků závodů na 100 m můžeme vypočítat rychlosti obou hochů:

- Honza: $v_H = \frac{s}{t} = \frac{100}{16,5} \text{ m/s} = 6,1 \text{ m/s}$,
- Jirka: $v_J = \frac{s}{t} = \frac{100}{12,5} \text{ m/s} = 8 \text{ m/s}$.

Snažíme se popsat závod na 60 m vymyšlený Jirkou.

Honza má 10 m náskok $\Rightarrow$ v okamžiku, kdy Jirka Honzu dohoní, urazí o 10 m více:

$s_H + 10 = s_J$

Dosadíme: $v_H t_H + 10 = v_J t_J$.

Oba vyrážejí ve stejný okamžik $\Rightarrow$ $t_H = t_J = t$: $v_H t + 10 = v_J t$.

Dosadíme rychlosti obou kluků: $6,1t + 10 = 8t \quad / -6,1t$
$10 = 1,9t \quad / :1,9$
$t = 5,3\ \text{s}$

Uběhlá vzdálenost před setkáním:
- Honza: $s_H = v_H t_H = 6,1 \cdot 5,3\ \text{m} = 32,3\ \text{m}$,
- Jirka: $s_J = v_J t_J = 8 \cdot 5,3\ \text{m} = 42,4\ \text{m}$.

Jirkova vzdálenost není větší přesně o 10 m (způsobeno zaokrouhlováním v průběhu výpočtu).

Jirka Honzu předběhne na 42 m své dráhy (tedy 18 m před cílem).

Př. 9: Na jednokolejné trati mezi Dolní Lhotou a Nebesovem dlouhé 15 km se má vybudovat malá stanice, kde se budou vyhýbat protijedoucí vlaky. Kde je třeba stanici postavit, aby vlaky vyjíždějící současně z obou koncových stanic čekaly co nejméně, pokud vlak jede ze Lhoty do Nebesova do kopce rychlostí 35 km/h zatímco vlak v protisměru je o 15 km/h rychlejší?

Nejvýhodnější je postavit stanici tam, kde by se vlaky srazily, kdyby vyjely proti sobě.
Vlaky se potkají ve chvíli, kdy společně urazí 15 km: $s_1 + s_2 = 15$.
Dosadíme: $v_1 t_1 + v_2 t_2 = 15$.
Oba vlaky vyjíždějí současně $\Rightarrow$ jedou stejně dlouho: $t_1 = t_2 = t$: $v_1 t + v_2 t = 15$.
Dosadíme hodnoty rychlostí: $35t + 50t = 15$.
$85t = 15 \quad / :85$
$t = \frac{15}{85}\ \text{h} = \frac{3}{17}\ \text{h} = 0,059\ \text{h}$
Vzdálenosti uražené vlaky:
- ze Lhoty do Nebesova (do kopce): $s_1 = v_1 t_1 = 35 \cdot \frac{3}{17}\ \text{km} = 6,2\ \text{km}$,
- z Nebesova do Lhoty (s kopce): $s_2 = v_2 t_2 = 50 \cdot \frac{3}{17}\ \text{km} = 8,8\ \text{km}$,

(součet obou drah: $6,2 + 8,8\ \text{km} = 15\ \text{km}$ - OK).

Vyhýbací stanici je třeba vybudovat ve vzdálenosti 6,2 km od Lhoty (8,8 km od Nebesova).

Př. 10: Vrať se k příkladu 8. Urči, jaký náskok by musel Jirka Honzovi dát, aby Honza mohl vyhrát.

Spočteme, jak dlouho Jirka poběží 60 m a jakou vzdálenost by za tuto dobu uběhl Honza. Zbytek do 60 m pak musí představovat jeho náskok.

Doba, po kterou Jirka poběží: $t = \frac{s}{v} = \frac{60}{8}\ \text{s} = 7,5\ \text{s}$.
Vzdálenost, kterou za tuto dobu uběhne Honza: $s = vt = 6,1 \cdot 7,5\ \text{m} = 45,75\ \text{m}$.

Jirka musí dát Honzovi náskok $60 - 45,75\ \text{m} = 14,25\ \text{m}$.

Shrnutí: Při řešení úloh o pohybu je třeba vyjít z rovnice, která popisuje zvláštnost celého pohybu a pak do ní dosazovat.